APLICACIÓN DE ALGORITMOS COMO ESTRATEGIA DE APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO DE LAS MATEMÁTICAS

José Cirilo Castañeda Delfín
Joel Ernesto López Valdez
Oscar Salas Carrillo
Ethan Gair Ochoa Amaya
Dhalia Gail Arzola Rentería
Enrique Mier Regis
Vanessa Díaz Delgado
Santiago Aguilar Cabada
Laura Guadalupe Hernandez Reza
Alexa Cristel Vázquez Rodríguez

9 786078 662920

Aplicación de algoritmos como estrategia de aprendizaje significativo de las matemáticas

Coordinador

Jose Cirilo Castañeda Delfín

Autores

- Joel Ernesto López Valdez
- Oscar Salas Carrillo
- Ethan Gair Ochoa Amaya
- Dhalia Gail Arzola Rentería
- Enrique Mier Regis
- Vanessa Díaz Delgado
- Santiago Aguilar Cabada
- Laura Guadalupe Hernández Reza
- Alexa Cristel Vázquez Rodríguez

ReDIE

Red Durango de Investigadores Educativos A.C.

Primera edición: diciembre 13, 2024
Editado: en Durango, Dgo. México
ISBN: 978-607-8662-92-0

Editor:

Red Durango de investigadores Educativos A.C.

SOBRE LOS AUTORES

Somos un grupo de estudiantes de tercer semestre de la licenciatura en Matemáticas en la Facultad de Ciencias Exactas de la Universidad Juárez del Estado de Durango. Este libro ha sido el resultado de nuestro esfuerzo conjunto, motivados por el deseo de aportar materiales didácticos de calidad para la comunidad académica.

A lo largo de su elaboración, contamos con la valiosa orientación y colaboración de nuestro profesor José Cirilo Castañeda Delfín, quien nos guio en cada etapa del proceso, brindándonos apoyo técnico y académico. Su experiencia y dedicación fueron fundamentales para alcanzar este logro.

Queremos expresar nuestro más sincero agradecimiento a todos los profesores de nuestra institución, cuyas enseñanzas no solo enriquecen nuestras mentes, sino que también inspiran nuestras aspiraciones. Este libro es un reflejo de los conocimientos que hemos adquirido y de nuestra pasión por las matemáticas.

Confiamos en que este material sea de utilidad y aporte valor al aprendizaje y desarrollo de todos aquellos que lo utilicen.

Por:

- Joel Ernesto López Valdez
- Oscar Salas Carrillo
- Ethan Gair Ochoa Amaya
- Dhalia Gail Arzola Rentería
- Enrique Mier Regis
- Vanessa Díaz Delgado
- Santiago Aguilar Cabada
- Laura Guadalupe Hernandez Reza
- Alexa Cristel Vázquez Rodríguez

ÍNDICE

INTRODUCCIÓN

Las matemáticas desde sus inicios, con el número como origen de registro para cuantificar y medio para el control de bienes e indicador de dimensiones de propiedades, ha buscado siempre la solución de problemas para que el hombre se adapte a la naturaleza y a su vez adapte a esta para su beneficio.

Ha sido en ese resolver de problemas, donde se llegan a encontrar series de pasos para las soluciones de problemas cuando, se puede llegar a la estructuración de procedimientos para resolver problemas similares, y con esto aprender a aplicar las matemáticas a aprender y plantear nuevas soluciones utilices en la vida de las personas.

Al realizar una serie finita de pasos para la solución de problemas, donde en determinados pasos se toman decisiones fundamentadas, se llega a lo que se conoce como un algoritmo definido por (Beauvier y George, 1984) como “una serie finita de reglas a aplicar en un orden determinado a un número finito de datos para llegar con certeza (es decir, sin indeterminación ni ambigüedades), en un número finito de etapas, a cierto resultado, y esto, independientemente de los datos".

La definición de algoritmo, provienen del matemático uzbeko Al- Jwarizmi quien en el siglo IX propuso las reglas de los algoritmos sencillos referentes a las cuatro operaciones elementales de la aritmética (suma, resta, multiplicación y división).

La definición y utilidad del algoritmo como estructuración de pasos, y toma de decisiones para llegar a una solución, donde existe un inicio, procesos que muchas veces incluye toma de decisiones para llegar a un resultado qué en matemáticas, significa una solución a un problema.

Lo anterior relaciona la historia de las matemáticas con aportes como el de alemán Leibniz (1646- 1716) quien buscó siempre crear un método para resolver problemas por personas que careciendo de conocimientos suficientes pudieran llegar a solucionar problemas.

También (Piaget,1935, p. 174) señala que “educar es adaptar al individuo al medio social, al ambiente”, manifiesta que el solucionar un problema significa una adaptación y que en el niño significan una maduración, un desarrollo cognitivo, que permite el aprendizaje significativo y si este es a través de la realización de pasos con tomas de decisiones da sentido a la aplicación de algoritmos.

Por otra parte, la teoría constructivista, manifiesta que el aprender matemáticas es aprender a resolver problemas concretos que sean parte de la realidad y aplicados a la vida cotidiana (Vigotsky, 1988, p. 133), dando sentido el uso de algoritmos en el estudiante mientras aprende una disciplina relacionada a matemáticas.

La utilidad de los algoritmos se basa en la comprensión y la adaptación de procedimientos dentro del aula, Pólya, en su libro *Cómo resolverlo* de 1941 sugiere usar los pasos siguientes para resolver problemas matemáticos:

1. Primero se tiene que entender el problema.
2. Una vez comprendido, se hace un plan.
3. Se lleva a cabo el plan.
4. Revisa tu trabajo y pregúntate si no se podría hacer mejor.

También Polya (1962; 1965) plantea que la solución a un problema es encontrar una salida a una dificultad, una forma de evitar un obstáculo y de lograr un objetivo que no era inmediatamente alcanzable.

La solución a un problema es algo intrínseco al ser humano, al ser el logro de una solución que resulta en una utilidad resulta en una motivación extrínseca.

En este sentido la solución de problemas teóricos o concretos pretende que a través de la experiencia en la solución de problemas y el ver como otras personas resuelven problemas, genera conocimiento y a su vez resulta de utilidad para quienes requieren ese conocimiento en situaciones específicas, además de promover el interés de Henri Poincaré, matemático francés que creía que el conocimiento, para ser de utilidad, tiene que generalizarse.

Finalmente, el aprendizaje de las matemáticas en las diversas carreras de licenciatura, busca la comprensión de la realidad, la adaptabilidad y generación de métodos para resolver problemas de utilidad, además del desarrollo del pensamiento crítico del estudiante, al pretender la autonomía en el aprendizaje de las matemáticas.

Como propuesta para el aprendizaje de las matemáticas el presente material pretende que, a través de la aplicación de algoritmos, el estudiante puede familiarizarse con la solución de problemas donde la aplicación de herramientas matemáticas es fundamental, que observe y analice la solución como resultado de una serie de pasos y a su vez que logre la motivación suficiente para interesarse en la solución de problemas cotidianos

Referencias

- Bouvier, A. y George, M. (1984): "Diccionario de Matemáticas". Akal Editor. Madrid.
- Bell, A. W.; Costello, J. y Kucheman, D. (1983): "Research on Learning and Teaching. A Review of Research in Mathematical Education. Part A". NFER-Nelson. Windsor.
- Polya, G. (1962). Mathematical Discovery. New York: John Wiley & Sons,Inc.
- Polya, G. (1965). Cómo plantear y resolver problemas. México, D. F: Trillas.
- Maslow A. (1983). La personalidad Creadora. Barcelona: Kairos.
- Kilpatrick, J. y Radatz, H. (1983). How teachers might make use of research on problem solving. Zentralblatt für Didaktik der Mathematik, 15, 151-155.

ALGORITMO PARA RESOLVER PROBLEMAS DE OPTIMIZACIÓN, UNA APLICACIÓN DEL CONCEPTO DE DERIVADA UTILIZADO EN CALCULO DIFERENCIAL

Por Joel Ernesto López Valdez

El cálculo diferencial es una materia tradicional en los planes de estudio y forma una de las ramas más importantes de las matemáticas y de las ciencias (Nesterova, 2016). Este campo permite analizar cómo una función varía en torno a un punto y es esencial para comprender la variabilidad en situaciones prácticas y teóricas.

La derivada, concepto central en el cálculo diferencial, representa la pendiente de una función en un punto dado. Matemáticamente, la derivada mide cómo varía el valor de una función respecto al cambio en sus variables independientes. Una manera fácil de verlo es imaginando que la función es un camino y un punto que la recorre es un automóvil que toma la dirección dependiendo de su posición, esta dirección es la derivada.

Una de las aplicaciones más importantes de las derivadas son los problemas de optimización, que consisten en encontrar la manera óptima (la mejor) para hacer algo. La optimización tiene gran relevancia en distintas disciplinas, ya que permite resolver problemas como maximizar la producción con recursos limitados o minimizar los costos en un proyecto.

A grandes rasgos, estos problemas se reducen a encontrar el valor máximo o mínimo de una función en un intervalo dado. Los conceptos de máximo y mínimo son cruciales en esta área: un máximo local de una función es un punto en el cual la función alcanza un valor mayor que en los puntos circundantes, mientras que un mínimo local es un punto en el cual la función alcanza un valor menor en comparación con su entorno. Para identificar estos puntos, se utiliza el concepto de derivada: cuando la derivada de una función en un punto es igual a cero, significa que la función tiene una pendiente horizontal en dicho punto, lo que indica la posible existencia de un máximo o un mínimo.

Como el objetivo de este apartado es demostrar que la mayoría de los procesos que se realizan en el estudio de las matemáticas pueden ser mecanizados por medio de la aplicación de una serie de pasos, a continuación, se propone un algoritmo que involucra la metodología para resolver problemas de optimización de manera sistematizada.

Utilizaremos el problema siguiente:

"Optimización de un rectángulo Inscrito en un Círculo. Dado un círculo de radio r, se desea encontrar las dimensiones de un rectángulo inscrito en el círculo tal que su área sea máxima".

- **Paso 1: Comprender el Problema y Definir la Función**

El primer paso para resolver un problema de optimización consiste en entender el problema y formular una función que represente la cantidad que queremos optimizar. Para ello, es importante leer cuidadosamente el enunciado del problema y definir una variable que represente la magnitud de interés. A continuación, se debe escribir una función en términos de esta variable.

En nuestro ejemplo, la meta es maximizar el área del rectángulo, así que definimos A como el área del rectángulo en términos de sus dimensiones x y y

$$A = x \cdot y$$

Donde x y y son las longitudes de los lados del rectángulo.

- **Paso 2: Expresar la Función a Optimizar en una Variable**

La función de interés debe expresarse en términos de una sola variable, si no lo está ya. En ejercicio propuesto, dado que el rectángulo está inscrito en el círculo, los vértices del rectángulo tocan la circunferencia del círculo. Esto implica que la distancia desde el centro del círculo hasta cualquier vértice del rectángulo es igual al radio r. Por lo tanto, x y y están relacionados por la ecuación de un círculo de radio r:

$$x^2 + y^2 = r^2$$

De esta relación, podemos despejar y en términos de x:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2}$$

Ahora, sustituimos y en la fórmula del área:

$$A(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Nuestra función objetivo ahora es $A(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$ una función de una sola variable x.

Paso 3: Encontrar la Derivada de la Función

Una vez que tenemos la función en una sola variable, hallamos su derivada con respecto a esa variable. Esto nos permitirá identificar los puntos críticos, donde la función puede alcanzar valores máximos o mínimos. En nuestro caso, derivamos $A(x)$ con respecto a x.

La función a derivar es:

$$A(x) = x \cdot \sqrt{r^2 - x^2}$$

Aplicamos la regla del producto, donde si $f(x) = x$ y $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, entonces $A'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$.

- Derivada de $f(x) = x$: $f'(x) = 1$
- Derivada de $g(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$:

$$g'(x) = \frac{1}{2\sqrt{r^2 - x^2}} \cdot (-2x) = \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Entonces, la derivada de $A(x)$ es:

$$A'(x) = 1 \cdot \sqrt{r^2 - x^2} + x \cdot \frac{-x}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Simplificamos:

$$A'(x) = \frac{(r^2 - x^2) - x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = \frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}}$$

Paso 4: Igualar la Derivada a Cero y Resolver para Encontrar los Puntos Críticos

Para identificar los puntos donde la función alcanza máximos o mínimos, igualamos la derivada a cero y resolvemos para x:

$$A'(x) = 0$$

$$\frac{r^2 - 2x^2}{\sqrt{r^2 - x^2}} = 0$$

Esto implica que el numerador debe ser igual a cero:

$$r^2 - 2x^2 = 0$$

Despejamos x^2:

$$x^2 = \frac{r^2}{2}$$

$$x = \pm\frac{r}{\sqrt{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Tomamos el valor positivo de x ya que representa una longitud, así que $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$.

Ahora, sustituimos $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$. en la ecuación para y:

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} = \sqrt{r^2 - \left(\frac{r\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$$y = \sqrt{r^2 - \frac{r^2}{2}} = \sqrt{\frac{r^2}{2}} = \frac{r\sqrt{2}}{2}$$

Paso 5: Determinar la Naturaleza de los Puntos Críticos

Al resolver esta ecuación, encontramos los valores de x que hacen que la derivada sea cero. Estos valores de x corresponden a los puntos críticos de la función. Para decidir si los puntos críticos corresponden a un máximo o mínimo, podemos utilizar el criterio de la segunda derivada o el criterio de la primera derivada. En este caso, evaluamos la segunda derivada de $A(x)$ en los puntos críticos. Si la segunda derivada es negativa, el punto es un máximo local; si es positiva, es un mínimo local.

$$A''(x) = \frac{-4x(r^2 - x^2) + x(r^2 - 2x^2)}{(r^2 - x^2)^{\frac{3}{2}}}$$

Sustituimos $x = \frac{r\sqrt{2}}{2}$ en $A''(x)$. Así podríamos descubrirlo, sin embargo, como en este trabajo el objetivo no es resolver este problema sino explicar el algoritmo diremos la respuesta para esta parte usando una idea geométrica que dice que, de todos los rectángulos inscritos en un círculo, el cuadrado tiene el área máxima.

Paso 6: Interpretar la Solución en el Contexto del Problema

Finalmente, una vez que hemos identificado los valores de x y y que maximizan el área del rectángulo, interpretamos la solución en términos del problema original. En nuestro ejemplo, podemos concluir que las dimensiones del rectángulo que maximiza el área inscrita en el círculo de radio r son tales que x y y cumplen las condiciones obtenidas en los pasos anteriores.

Entonces, las dimensiones del rectángulo que maximizan el área son:

$$x = \frac{r\sqrt{2}}{2} \text{ y } y = \frac{r\sqrt{2}}{2}.$$

En este trabajo, exploramos el uso de algoritmos de optimización aplicados a problemas prácticos. El proceso para resolver estos problemas sigue una estructura clara:

- Primero se define la función objetivo, que representa la cantidad a maximizar o minimizar.
- Luego, se aplica la derivada para identificar los puntos críticos de la función.
- Por último, se utiliza la segunda derivada, o el contexto del problema, para determinar la naturaleza de estos puntos críticos.

Este procedimiento sistemático es fundamental en el cálculo diferencial y se extiende a problemas de ingeniería, economía, física, y otros campos donde la optimización es esencial. Ahora bien, habiendo encontrado un algoritmo que podemos seguir en la mayoría de los problemas es muy práctico para ahorrarnos tiempo y resolverlos de forma eficaz.

Referencias:

- Nesterova, E. & Universidad de Guadalajara [UDG]. (2016). Cálculo diferencial [PDF]. En *Guía de Estudio* (pp. 138-140). Red Universitaria de Jalisco. https://www.cucei.udg.mx/maestrias/matedu/sites/default/files/guia_calculo_diferencial.pdf
- Stewart, J. (2015). *Calculus: Early Transcendentals*.
- Oviedo, H. & Centro de Investigación en Matemáticas A.C. [CIMAT]. (2016). Algoritmos de Optimización sobre Variedades con Restricciones de Ortogonalidad [Tesis de maestría, Centro de Investigación en Matemáticas A.C.]. https://cimat.repositorioinstitucional.mx/jspui/bitstream/1008/495/1/TE_1550.pdf

ALGORITMOS EN GEOMETRÍA

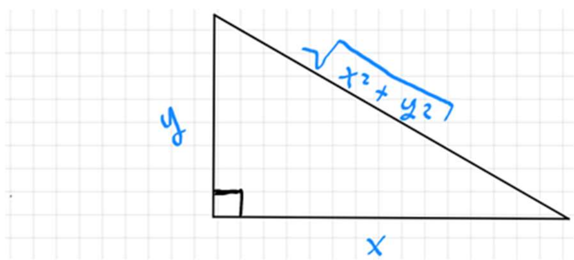
Por Oscar Salas Carrillo

Teorema de Pitágoras

El teorema de Pitágoras es uno de los teoremas más conocidos no sólo en Geometría sino en la vasta matemática. El teorema dice lo siguiente:

En un triángulo rectángulo, la longitud de la hipotenusa al cuadrado es igual a la suma de cuadrados de los catetos.

El teorema proporciona en sí mismo una un algoritmo que ya bien hemos aprendido todos aquellos que hemos pasado por las clases del nivel básico y medio superior en nuestro país.



Hay una gran cantidad de ejemplos sobre el uso del teorema de Pitágoras, pero en general el algoritmo que este nos proporciona es el siguiente:

1. *Si te dan la longitud de los 2 catetos*
   - Toma un cateto arbitrario, eleva su longitud al cuadrado.
   - Toma el cateto restante y eleva su longitud al cuadrado.
   - Suma ambas longitudes al cuadrado.
   - Saca la raíz cuadrada al resultado del paso anterior.
2. *Si te dan la longitud de la hipotenusa*
   - Toma la longitud de la hipotenusa y elévala al cuadrado.
   - Toma la longitud del cateto y elévalo al cuadrado.

- Al cuadrado de la longitud de la hipotenusa réstale el cuadrado de la longitud del cateto
- Saca raíz cuadrada al resultado del paso anterior

Una aplicación interesante del teorema de Pitágoras que también nos lleva a un algoritmo muy usa- do es *El cálculo de la distancia entre* 2 *puntos en el plano cartesiano.* Si $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ son 2 puntos como en la figura 1 su distancia está dada por d(A,B) = $\sqrt{z}$ donde $z = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$. Este es un algoritmo que usamos siempre cuando recibimos la clase de geometría analítica y que nos llega con la ventaja de tener de no depender del orden que elijamos para operar a A y a B.

2. Cálculo de pendiente

El algoritmo del cálculo de pendientes de las rectas en el plano cartesiano es muy similar al del tema anterior. Si tenemos 2 A Y B puntos en el plano cartesiano formalmente conocido como R^2 tales que $A = (x_1, y_1)$ y $B = (x_2, y_2)$ podemos construir una recta única que pase por ellos. La idea de la pendiente surge de la pregunta ¿Cuánto crece o decrece la recta? La respuesta es la pendiente que se define como la razón entre $|y_2 - y_1|$ y $|x_2 - x_1|$ que se denota regularmente por la letra m como se ve en la figura 2. En la escuela nos enseñan este algoritmo sin el uso del valor absoluto a condición de que el punto al que se le asignen las coordenadas con subíndice 2 sea el punto que este más a la derecha o al este. El algoritmo enseñado en escuelas del cálculo de la pendiente dados 2 puntos consta de los siguientes pasos en orden descendente:

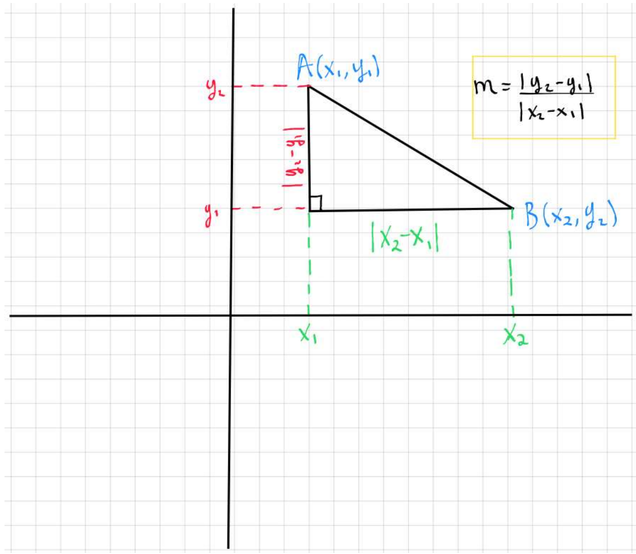


Figura 2: Derivación de la fórmula de la pendiente.

- Localiza el punto que esté más a la derecha.
- Iguala la primera coordenada con x_2 y la segunda coordenada con y_2
- Localiza el punto restante
- Iguala la primera coordenada con x_1 y la segunda coordenada con y_1
- Sustituye los valores en la fórmula de la pendiente para obtener el resultado deseado

En general este algoritmo es mecánico y repetitivo. Sin embargo, la noción de pendiente puede llevar al estudio del comportamiento de curvas suaves lo que le da nacimiento a la noción de derivada o a la inclinación de montañas haciendo uso de las curvas de nivel. También en los cursos de geometría analítica se nos enseña otro algoritmo tal vez un poco más importante. Hablamos del cálculo de la ecuación de una recta. Dado un punto (x_1, y_1) que pase por la recta y su pendiente m la ecuación de la recta se obtiene a partir de la siguiente fórmula

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

que simplemente es la fórmula de la pendiente despejada. Lo interesante de este tema de las ecuaciones, es que puede ser generalizado para planos e hiperplanos de dimensión superior lo cual nos dice que las ecuaciones tienen un nivel de profundidad matemática superior que la pendiente, pero esos son temas que no conciernen a este escrito.

3. Cálculo de un producto punto y sus derivados

Las interpretaciones de los pares ordenados pueden trascender los puntos. Concretamente si se tiene algún punto dado (x, y) en el plano cartesiano, se puede trazar siempre un segmento de recta que vaya del $(0, 0)$ al (x, y), este tipo de segmentos se les llama comúnmente vectores. Dentro del reino de los vectores podemos hacer 2 operaciones con ellos, sumarlos y multiplicarlos por un número real comúnmente llamado escalar. En el espacio en el que vivimos de 3 dimensiones existe una operación extra que es el producto entre ellos que recibe el nombre de **producto cruz** el cual únicamente existe en nuestro espacio, es decir, solamente puede ser efectuado entre vectores de 3 coordenadas.

Existe aún una operación más entre los vectores que es llamada el **producto punto**. El producto punto existe en cualquier dimensión y es una forma efectiva de determinar característica en común de los vectores, por ejemplo, si son ortogonales o no. Por comodidad trabajaremos con el producto punto de 2 dimensiones, con vectores en el plano de 2 coordenadas.

Si (x, y) y (a, b) son dos vectores en el plano cartesiano, su producto punto se define como

$$(x, y) * (a, b) = xa + yb$$

Otra operación que se puede definir en el contexto de los vectores es la norma de un vector. Si se tiene un vector $v = (a, b)$ su **norma** se define como

$$||v|| = \sqrt{d}$$

En donde $d = a^2 + b^2$. Esta expresión es básicamente la distancia que hay entre el punto (0, 0) y el punto (*a, b*). La fórmula que resulta en este contexto es la siguiente. Si se tienen 2 vectores u y v (figura 3) se puede obtener el coseno del ángulo θ entre ellos mediante la siguiente fórmula.

$$\cos(\theta) = \frac{u * v}{||u||||v||}$$

la cual es una fórmula que de nuevo nos proporciona un algoritmo geométrico que se efectúa aproximadamente de la siguiente manera dados 2 vectores $u = (a, b)$ y $v = (c, d)$:

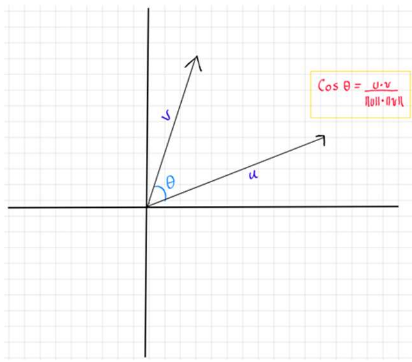


Figura 3: Fórmula del coseno del ángulo entre 2 vectores

1. Calcula el producto punto de ambos vectores escribiendo el producto de las coordenadas en x más el producto de las coordenadas en y.
2. Toma el primer vector u eleva sus coordenadas al cuadrado y súmalas. Al resultado sácale raíz.
3. Toma el segundo vector v eleva sus coordenadas al cuadrado y súmalas. Al resultado sácale raíz.
4. Has el producto de los resultados de los pasos 2 y 3.
5. Divide el resultado del paso 1 entre el resultado del paso 4
6. Con ayuda de tu calculadora calcula el $\cos^{-1}$ metiendo el resultado del paso 5 lo cual debe de ser el ángulo que se encuentra entre ambos vectores u y v.

Con ayuda de tu calculadora calcula el $\cos^{-1}$ metiendo el resultado del paso 5 lo cual debe de ser el ángulo que se encuentra entre ambos vectores *u* y *v*.

4. Cálculo de áreas.

En el cálculo de área hay 4 verdades que son ciertas sin necesidad de prueba, los bien llamados *axiomas* que son los siguientes:

- Figuras congruentes tienen áreas congruentes.
- Si una figura es la unión de partes que no se traslapan o empalman, el área total de la figura es la suma de las partes.
- Si una figura es la unión de 2 figuras que se traslapan o empalman, el área total de la figura es la suma de las áreas de cada figura menos el área de la región que traslapada.
- El área de un rectángulo es el producto de su base por su altura.

A partir de estas 4 verdades irrefutables los matemáticos antiguos derivaron varias fórmulas de área que hoy en día estudiamos en nuestros primeros años de formación. En concreto la fórmula más famosa de entre todas las fórmulas de área es la del triángulo. Piensen en un triángulo cualquiera de vértices A, B, C cuya base es b y altura h entonces como se muestra en la figura 4 su área es igual a $\frac{bh}{2}$ ya que se puede construir un rectángulo cuya área mida el doble que la del triángulo, pero el área del rectángulo es conocida y es bh por lo que el resultado del área del triángulo se sigue de inmediato.

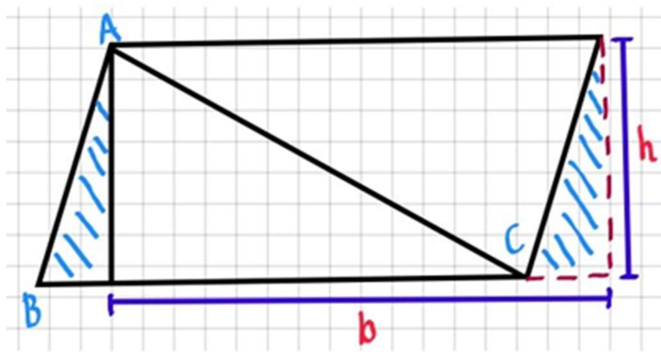


Figura 4: área visual del triángulo rectángulo

Hay muchas figuras regulares que se pueden calcular a partir de saber que el área de un triángulo es $\frac{bh}{2}$ por ejemplo en teoría con la información suficiente, se puede calcular el área de cualquier polígono convexo, es decir, un polígono en el cual todos sus ángulos internos miden menos de 180° ya que se puede triangular. Todas estas fórmulas nos proporcionan algoritmos del mismo tipo que aquellos que hemos estudiado anteriormente.

Referencias

- Spivak, M. (2014). Calculus 3ª edición. Barcelona: Reverté.
- Swokoswki, E & Cole, J. (2018). Precálculo Álgebra y Trigonometría con geometría analítica. Ciudad de México: Cengage Learning Editores, S.A de C.V.

ALGORITMOS PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN 1

Por Vanessa Díaz Delgado

En esta sección encontraremos la interpretación de diferentes autores para definir el concepto de derivada y asociarlo con un algoritmo eficiente para aplicarlo a funciones.

¿Qué son los algoritmos?

Un algoritmo es un método para resolver un problema mediante una serie de pasos definidos, precisos y finitos. Se le llama algoritmo a una serie de operaciones detalladas y no ambiguas a ejecutar paso a paso, y que conducen a la resolución de un problema. Un algoritmo es el medio por el que se explica cómo se puede resolver un problema, mediante aproximaciones paso a paso.

¿Qué es la derivada de una función?

La derivada de una función es la razón de cambio instantánea con la que varía el valor de dicha función matemática, según se modifique el valor de su variable independiente. La derivada de una función es un concepto local, es decir, se calcula como el límite de la rapidez de cambio media de la función en cierto intervalo, cuando el intervalo considerado para la variable independiente se torna cada vez más pequeño. Por eso se habla del valor de la derivada de una función en un punto dado.

La derivada de una función *f* en un número a, denotada con f'(a) es

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \qquad \text{def (1)}$$

si este límite existe.

Para hacer que el número *a* varíe, reemplazamos *a* con una variable *x*, y obtenemos:

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \qquad \text{def (2)}$$

Dado cualquier número *x* para el cual este límite exista, asignamos a *x* el número f'(x). De modo que podemos considerar *f'* como una nueva función, llamada **derivada de f** y definida por medio de la ecuación 2. Sabemos que el valor de *f'* en *x*, f'(x), se puede interpretar geométricamente como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de f en el punto (x, f(x)).

Reglas de derivación

<u>Regla de la potencia:</u> Si *n* es cualquier número real, entonces

$$\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$$

<u>Regla del múltiplo constante:</u> Si *c* es una constante y *f* una función diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[cf(x)] = c\frac{d}{dx}f(x)$$

<u>Regla de la suma:</u> Si tanto *f* como *g* son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) + g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$$

<u>Regla de la diferencia:</u> Si tanto *f* como *g* son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x) - g(x)] = \frac{d}{dx}f(x) - \frac{d}{dx}g(x)$$

Regla del producto: Si tanto *f* como *g* son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}[f(x)g(x)] = f(x)\frac{d}{dx}[g(x)] + g(x)\frac{d}{dx}[f(x)]$$

Regla del cociente: Si tanto *f* como *g* son diferenciables, entonces

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{f(x)}{g(x)}\right] = \frac{g(x)\frac{d}{dx}[f(x)] - f(x)\frac{d}{dx}[g(x)]}{[g(x)]^2}$$

Regla de la cadena: Si tanto *f* como *g* son funciones diferenciables y $F = f \circ g$ es la funcion compuesta definida por F(x)= f(g(x)), entonces F es diferenciable en F' se expresa mediante el producto

$$F'(x) = f'(g(x))\ g'(x)$$

Regla de la potencia combinada con la regla de la cadena: Si *n* es cualquier número real y *u*=g(x) es diferenciable, entonces

$$\frac{d}{dx}[g(x)]^n = n[g(x)]^{n-1} \cdot g'(x)$$

Derivada de una función constante

$$\boldsymbol{\frac{d}{dx}(c) = 0}$$

Derivada de la función exponencial natural

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

Derivadas de las funciones trigonométricas

- $\frac{d}{dx}(\sin x) = \cos x$
- $\frac{d}{dx}(\cos x) = -\sin x$
- $\frac{d}{dx}(\tan x) = sec^2\, x$
- $\frac{d}{dx}(\csc x) = -\csc x \cot x$
- $\frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x$
- $\frac{d}{dx}(\cot x) = -csc^2 x$

<u>**Ejemplos**</u>

1. Encuentre la derivada de la función $f(x) = x^2 - 8x + 9$ en el número a. <u>Solución</u>. A partir de la definición 1, tenemos

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

Paso 1	$= \lim_{h \to 0} \frac{[(a+h)^2 - 8(a+h) + 9] - [a^2 - 8a + 9]}{h}$
Paso 2	$= \lim_{h \to 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - 8a - 8h + 9 - a^2 + 8a - 9}{h}$
Paso 3	$= \lim_{h \to 0} \frac{2ah + h^2 - 8h}{h}$
Paso 4	$= \lim_{h \to 0}(2a + h - 8)$

Paso 5	$= \mathbf{2a + (0) - 8}$
Paso 6	$= \mathbf{2a - 8}$

Lo primero que tenemos que hacer es conocer la def 1, ya que está nos sirve para conocer la derivada. Una vez teniendo está definición el paso 1 es aplicar la definición a nuestra f(x). Después desarrollamos los binomios y notamos que podemos reducir. En seguida observamos que nuestro factor común es h y está se divide con la h del denominador, así llegamos al paso 4 y ya solo es necesario sustituir el valor de h, y obtenemos la derivada de f(x).

2. Halle f' si $f(x) = \frac{1-x}{2+x}$

<u>Solución</u>**.**

Paso 1	$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{\frac{1-(x+h)}{2+(x+h)} - \frac{1-x}{2+x}}{h}$
Paso 2	$= \lim_{h\to 0} \frac{(1-x-h)(2+x) - (1-x)(2+x+h)}{h(2+x+h)(2+x)}$
Paso 3	$= \lim_{h\to 0} \frac{(2-x-2h-x^2-xh) - (2-x+h-x^2-xh)}{h(2+x+h)(2+x)}$
Paso 4	$= \lim_{h\to 0} \frac{-3h}{h(2+x+h)(2+x)}$
Paso 5	$= \lim_{h\to 0} \frac{-3}{(2+x+h)(2+x)}$
Paso 6	$= \frac{-3}{[2+x+(0)](2+x)}$
Paso 7	$= \frac{-3}{(2+x)(2+x)}$
Paso 8	$= \frac{-3}{(2+x)^2}$

Primero aplicamos la def 2 a nuestra f(x). Después realizamos la diferencia de fracciones y aplicamos la regla del sándwich. Realizamos las operaciones y vemos que el factor común es h, que será dividida por la h del dominador. Luego sustituimos el valor de h, y finalmente notamos que tenemos un binomio al cuadrado.

3. Sea $y = \frac{x^2+x-2}{x^3+6}$

Entonces

Paso 1	$y' = \dfrac{(x^3+6)\frac{d}{dx}(x^2+x-2) - (x^2+x-2)\frac{d}{dx}(x^3+6)}{(x^3+6)^2}$
Paso 2	$= \dfrac{(x^3+6)(2x+1) - (x^2+x-2)(3x^2)}{(x^3+6)^2}$
Paso 3	$= \dfrac{(2x^4+x^3+12x+6) - (3x^4+3x^3-6x^2)}{(x^3+6)^2}$
Paso 4	$= \dfrac{-x^4-2x^3+6x^2+12x+6}{(x^3+6)^2}$

Utilizando las reglas de derivación aplicamos la regla del cociente, en donde sabemos cuál es nuestro numerador y denominador por lo que solo hace falta aplicar esta regla, multiplicar y desarrollar los binomios al cuadrado, para poder obtener nuestra derivada.

4. Encuentre la derivada de la función

$$g(t) = \left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^9$$

Solución. Si se combina la regla de la potencia y la de la cadena, y usamos la del cociente, obtenemos

Paso 1	$g'(t) = 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{d}{dt}\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)$
Paso 2	$= 9\left(\frac{t-2}{2t+1}\right)^8 \frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2}$
Paso 3	$= \frac{9}{1}\frac{(t-2)^8}{(2t+1)^8}\frac{(2t+1)\cdot 1 - 2(t-2)}{(2t+1)^2}$
Paso 4	$= \frac{9(t-2)^8}{(2t+1)^8}\frac{(2t+1) - 2t + 4}{(2t+1)^2}$
Paso 5	$= \frac{9(t-2)^8\,5}{(2t+1)^{10}}$
Paso 6	$= \frac{45(t-2)^8}{(2t+1)^{10}}$

Observamos que tenemos una composición, sea $(f \circ h)(t)$ en donde $h(t) = \frac{(t-2)}{(2t+1)}$ y $f(t) = t^9$, entonces $f\left(h(t)\right) = g(t)$.

Después aplicamos la regla de la potencia combinada con la de la cadena, en donde respecto a esto necesitaremos aplicar la regla del cociente. En seguida de esto necesitaremos multiplicar fracciones, así como hacer algunas operaciones básicas.

Del paso 4 al 5 notamos que pasan algunas cosas extrañas, pero no es más que solo sumar (2t+1-2t+4) que esto nos dará 5, y en el denominador observamos que tenemos factor común por lo que solo necesitamos sumar sus potencias; en el último paso solo multiplicamos el 9 por el 5 y obtendremos nuestra derivada.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN 2

Por Ethan Gair Ochoa Amaya

Una de las materias en las cuales los alumnos de preparatoria usualmente tienen más dificultades es en cálculo diferencial, más específicamente al derivar. Esto puede deberse a diversos factores, sin embargo, algunos de los más comunes es la falta de entendimiento que se tiene acerca de lo que se está haciendo cuando se está derivando, así como también confusiones durante el proceso de derivar, es por ello que el objetivo de este escrito es proporcionar un algoritmo que permita derivar, además de tratar de aclarar que es una derivada.

La derivada es la pendiente que tiene la recta tangente de una función en un determinado punto y la función derivada de otra función es el conjunto de estas pendientes. Visto de otra forma, la derivada es “la dirección” que tiene una función en un punto, por lo que la función derivada es el conjunto de éstas “direcciones” de la función. Otra forma de ver la derivada es como la razón de cambio de la función, es decir la rapidez con la que cambia de valor la función en un determinado instante.

Algoritmo para derivar

Algo que es necesario mencionar es que el proceso que se sigue al derivar depende de la “estructura de la función”, pues hay ligeras variaciones en este proceso, sin embargo, cada variación es aplicable a cualquier función que tenga una estructura similar. Cabe destacar que si a una función en la cual a la x se le está sumando un número la función derivada no cambia, pues al sumarle dicho número, lo único que se está haciendo es mover la función en el plano.

1. Lo primero que se tiene que hacer cuándo se deriva es analizar la función y ver qué tipo de estructura tiene. Estas estructuras se pueden combinar para dar paso a funciones más complejas, sin embargo, solo se necesita ir aplicando los algoritmos por partes y con el orden adecuado, por lo que también se tiene que analizar el orden que tiene la función. A continuación, algunas estructuras de funciones que se pueden tener

a) $f(x) = c$: En este caso la función es simplemente igual a un número

b) $f(x) = cx^n$: Ésta estructura es una de las más sencillas de derivar, pues es una estructura simple, en este caso c y n representan cualesquiera números.

c) Funciones trigonométricas básicas:

I. $sen(x)$
II. $cos(x)$
III. $tan(x)$
IV. $cot(x)$
V. $sec(x)$
VI. $csc(x)$

d) $f(x) + g(x)$: Ésta es otra estructura fácil de derivar pues su derivada es intuitiva.

e) $f(x) * g(x)$

f) $\frac{f(x)}{g(x)}$

g) $f\big(g(x)\big)$

2. Lo que sigue es aplicar la fórmula que corresponde a la primera estructura. Las fórmulas son:

a) $\frac{d}{dx}c = 0$

b) $\frac{d}{dx}cx^n = ncx^{n-1}$

c) Funciones trigonométricas:

I. $\frac{d}{dx}sen(x) = cos(x)$
II. $\frac{d}{dx}cos(x) = -sen(x)$
III. $\frac{d}{dx}tan(x) = sec^2(x)$
IV. $\frac{d}{dx}cot(x) = csc^2(x)$
V. $\frac{d}{dx}sec(x) = sec(x) * tan(x)$

VI. $\frac{d}{dx}csc(x) = -csc(x) * cot(x)$

d) $\frac{d}{dx}\big(f(x) + g(x)\big) = \frac{d}{dx}f(x) + \frac{d}{dx}g(x)$

e) $\frac{d}{dx}\big(f(x) * g(x)\big) = \left(\frac{d}{dx}f(x)\right) * g(x) + f(x) * \left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$

f) $\frac{d}{dx}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{\left(\frac{d}{dx}f(x)\right)*g(x) - f(x)*\left(\frac{d}{dx}g(x)\right)}{[g(x)^2]}$

g) $\frac{d}{dx}\Big(f\big(g(x)\big)\Big) = \left(\frac{d}{d\big(g(x)\big)}f\big(g(x)\big)\right) * \left(\frac{d}{dx}g(x)\right)$

3. Posteriormente se sube al siguiente nivel y se vuelve a aplicar la fórmula de la derivada, considerando como parte de la función a la derivada del nivel anterior. Esto se repite hasta que se llegue al último nivel, pues cuándo el último nivel se deriva ya se ha obtenido la derivada de la función original.

Ejemplos

Se tiene la función $f(x) = \frac{sen(x^3)}{x^4+5}$, los pasos para derivarla serían:

1. Se puede observar que la función utiliza 4 estructuras, la estructura $\frac{f(x)}{g(x)}$ que es la que se debería derivar primero, luego en la parte de arriba se tiene la estructura $f(g(x))$ que es la que se tiene que derivar después y que además es una función trigonométrica, luego, se tiene dentro de la función seno a la función x^3 que es la que se tendría que derivar y finalmente se tiene a la función de abajo, la cual es la función $x^4 + 5$ la cual es la última función por derivar.
2. Ahora empezamos a aplicar la primera fórmula:

$$\frac{d}{dx}f(x) = \frac{\frac{d}{dx}sen(x^3) * (x^4+5) - sen(x^3) * \frac{d}{dx}(x^4+5)}{(x^4+5)^2}$$

3. Después se aplica la fórmula a $\frac{d}{dx}sen(x^3)$, que es una composición

$$\frac{d}{dx}sen(x^3) = cos(x^3) * 3x^2 = 3x^2 * cos(x^3)$$

Por lo que ahora se tiene que: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{3x^2 * cos(x^3) * (x^4+5) - sen(x^3) * \frac{d}{dx}(x^4+5)}{(x^4+5)^2}$

4. Finalmente se deriva la última función que es $x^4 + 5$

$$\frac{d}{dx}(x^4 + 5) = 4x^3$$

Por lo que se tiene: $\frac{d}{dx}f(x) = \frac{3x^2 * cos(x^3) * (x^4+5) - sen(x^3) * (4x^3)}{(x^4+5)^2}$

Ahora se puede concluir que $\frac{d}{dx}(\frac{sen(x^3)}{x^4+5}) = \frac{3x^2 * cos(x^3) * (x^4+5) - sen(x^3) * (4x^3)}{(x^4+5)^2}$

Derivar funciones es algo que puede llegar a ser muy confuso cuando no se tiene orden en el proceso de deriva, sin embargo, si se sigue un método algorítmico como el que se ha mostrado aquí puede facilitar y clarificar en gran medida tanto el proceso de derivar como el concepto de lo que es una derivada, a pesar de que no se entró en mucha profundidad en este último.

ALGORITMO PARA ENCONTRAR LA DERIVADA DE UNA FUNCIÓN 3

Por Santiago Aguilar Cabada

La derivada es una herramienta matemática que permite comprender el comportamiento de las funciones y que se define como la razón de cambio instantáneo de una función en un punto específico:

- Se puede interpretar como la pendiente de la recta tangente a la gráfica de la función en un punto.
- Se puede utilizar para determinar los valores máximos y mínimos de una función.
- Se puede utilizar para localizar las concavidades de una función.
- Se puede utilizar para analizar la tendencia de una función en un intervalo determinado.

La derivada se define como el límite de la razón de cambio promedio de la función entre dos puntos cuando la distancia entre esos puntos tiende a cero.

Para entender el concepto de derivada es necesario recordar qué es la pendiente de una recta.

La pendiente de una recta, denotado habitualmente por **m**, indica la inclinación de la recta y se calcula dividiendo el incremento de la variable dependiente, y, entre el incremento de la variable independiente, x.

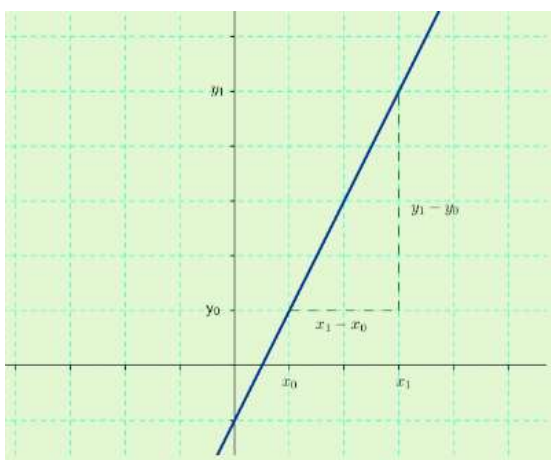


Imagen capturada en GeoGebra

Variación de una función

Dada una **función** f (x), se define **variación de la función** entre dos puntos de su dominio x_1 y x_2, siendo $x_1 < x_2$, a la diferencia f (x_2) - f (x_1). Cuando esta diferencia es positiva, la función es **creciente** en el punto; si es negativa, la función es **decreciente**.

Relacionada con este concepto, se llama **variación media** de una función f (x) en un intervalo [a, b] al cociente siguiente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

El valor de este cociente coincide con la **pendiente** de la **recta** que pasa por los puntos de coordenadas (a, f (a)) y (b, f (b)).

Derivada de una función en un punto

Dada una función f (x), y considerado un punto a de su **dominio**, se llama **derivada** de la función en ese punto, denotada como f(a), al siguiente **límite**:

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + h) - f(a)}{h}$$

Interpretación geométrica de la derivada

La definición de derivada tiene mucho que ver con el concepto de variación instantánea. Teniendo en cuenta que el cociente:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a}$$

expresa la pendiente de la recta que pasa por (a, f (a)) y (b, f(b)), es lógico pensar que, si b y a están muy próximos entre sí, separados por un valor h que tiende a cero, esta recta se aproximará a la recta tangente a la función en el punto x = a.

Derivadas laterales

Como sucedía con los límites, se pueden definir los conceptos de **derivadas laterales** de una función en un punto.

Dada una función f (x) y considerado un punto a de su dominio de definición, se define su **derivada por la derecha**, y se denota como $f\,(a^{+})$, al límite siguiente:

$$f'(a^{+}) = \lim_{x \to a^{+}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Por su parte, la **derivada por la izquierda** de f (x) en el punto a, denotada por $f(a^{-})$, se define como el siguiente límite:

$$f'(a^{-}) = \lim_{x \to a^{-}} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$$

Una función se dice **derivable** cuando tiene derivadas por la derecha y por la izquierda, y sus valores coinciden.

Las derivadas sirven para solucionar problemas de física y todas las materias que se basan en ella como estática, cinemática, calor, mecánica, ondas, corriente eléctrica, magnetismo, etc. Aplicable también en la economía para hallar valores mínimos y máximos los cuales son importantes para proyectar en economía.

Referencias

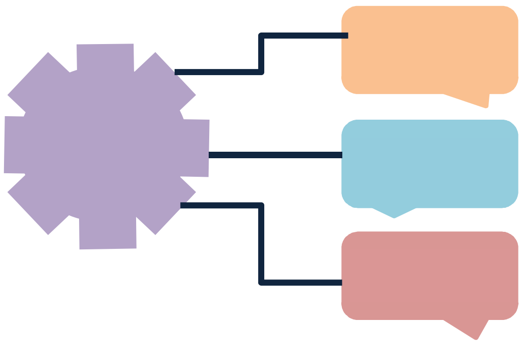
- Valdez, S. (2018). Apuntes de algoritmos - Diseño de programas. Profesores Facultad de Ingeniería UNAM. Recuperado 27 de octubre de 2024, de http://profesores.fi-b.unam.mx/vss/DOCS/ALGORITMOS_2018_1_FDP.pdf
- Rubio, P. (2022). Matemáticas Aplicadas a la Biología [Grado en Biología, Universidad de Sevilla]. https://personal.us.es/pmr/images/pdfs/mab-apendice-b-calculo-derivadas.pdf
- *Khan Academy*. (s. f.). https://es.khanacademy.org/math/differential-calculus/dc-diff-intro
- Derivadas. (s. f.). Material Didáctico - Superprof. https://www.superprof.es/apuntes/escolar/matematicas/calculo/derivadas/
- Stewart, J. (2010). Single variable calculus: Vol. 2, Early Transcendentals. Cengage Learning.

ALGORITMOS EN ECUACIONES DE PRIMER GRADO

Por Dhalia Gail Arzola Rentería

¿Qué es un algoritmo?

Se llaman *algoritmos* el **conjunto de instrucciones sistemáticas y previamente definidas que se utilizan para realizar una determinada tarea**. Estas instrucciones **están ordenadas y acotadas** a manera de pasos a seguir para alcanzar un objetivo.



Algoritmo matemático

Si nos remitimos a las matemáticas, qué es el ámbito en el que el término se origina, podemos decir que algoritmo es un **conjunto ordenado y finito de operaciones que deben seguirse para resolver un problema. Es un conjunto ordenado de operaciones, lo que quiere decir qué es una cadena de instrucciones precisas que deben seguirse por orden.**

Esta es la parte que complica un poco las cosas. Cuando escribimos un algoritmo, lo hacemos para que produzca un resultado. No se trata tan sólo de escribir un bonito conjunto de órdenes que no conduzcan a ninguna parte, sino que se hace racionalmente y con un objeto determinado.

Características

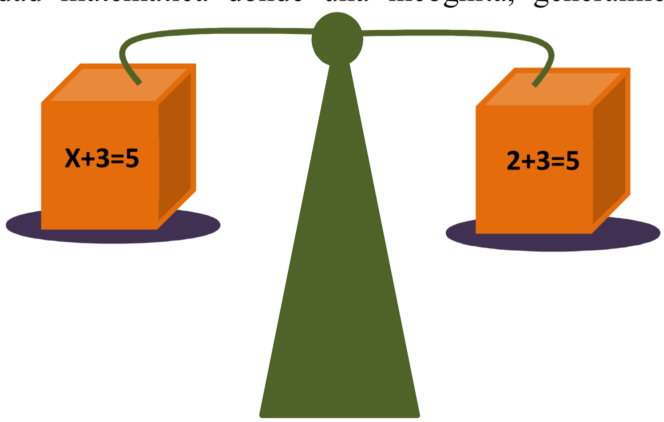
- **Tienen inicio y fin**: En el inicio, se definen los datos de entrada y el estado inicial del problema. En el fin, se obtiene la solución o salida deseada.
- **Funcionan en secuencia**: Las instrucciones que componen un algoritmo se ejecutan en un **orden específico**.
- **Los algoritmos son abstractos**: Sirven como base para la implementación de soluciones concretas.
- La **cantidad de pasos** de un algoritmo es **finita**: un algoritmo debe tener un **número finito de pasos**. No puede ser un proceso infinito o indefinido.

Ejemplo de algoritmo (Ecuaciones de primer grado)

¿Qué es la ecuación de primer grado?

Una **ecuación de primer grado** es una ecuación cuya solución viene dada por primero, el producto de sus variables (en este caso, x), y el valor medio de sus fórmulas integrales, como la matriz integral. Una ecuación de segundo grado es lo contrario de su homóloga de primer grado. Así, una solución de una **ecuación de primer grado** será siempre la suma de sus variables, mientras que las soluciones de una ecuación de segundo grado serán siempre iguales a los valores de primer grado de sus correspondientes variables. Además, las soluciones de las ecuaciones de tercer grado también son iguales a los valores de sus correspondientes variables, pero esto ocurre raramente.

En términos simples, es una igualdad matemática donde una incógnita, generalmente representada por la letra *x*, está elevada a la potencia de 1. Para esto podemos imaginar una balanza en equilibrio perfecto: a un lado tenemos una serie de números y la incógnita, y al otro lado otro número. Resolver la ecuación equivale a encontrar el valor exacto que debe tener la incógnita para mantener la balanza en equilibrio.



Elementos básicos

Las ecuaciones de primer grado son aquellas en las que la incógnita aparece elevada a la potencia 1. Es decir, no hay términos como x^2, x^3 o raíces de x. La forma general de una ecuación de primer grado con una incógnita es:

ax + b = 0

Donde:

- a y b son números conocidos (coeficientes).
- x es la incógnita.

Ejemplo: $2x + 5 = 11$

Elementos de una Ecuación

- **Términos:** Cada parte de una ecuación separada por signos de suma o resta se llama término. Por ejemplo, en $2x + 5 = 11$, los términos son $2x$, 5 y 11.
- **Coeficientes:** El número que multiplica a la incógnita se llama coeficiente. En $2x$, el coeficiente es 2.
- **Variable o incógnita:** Es la letra que representa el valor desconocido que queremos encontrar.
- **Término independiente:** Es el término que no tiene ninguna incógnita asociada. En $2x + 5 = 11$, el término independiente es 5.

Propiedades de la Igualdad

- **Reflexiva:** Cualquier número es igual a sí mismo. ($a = a$)
- **Simétrica:** Si $a = b$, entonces $b = a$.
- **Transitiva:** Si $a = b$ y $b = c$, entonces $a = c$.

Estas propiedades nos permiten manipular las ecuaciones sin alterar su igualdad.

¿Por qué son importantes las ecuaciones de primer grado?

Las ecuaciones de primer grado son la base para resolver una gran variedad de problemas en matemáticas, física, ingeniería y otras disciplinas. Nos permiten modelar situaciones reales y encontrar soluciones a problemas que involucran cantidades desconocidas.

Ejemplo: Si quiero saber cuántos años tiene Pedro sí sé que dentro de 5 años tendrá el doble de la edad que tiene ahora, puedo plantear la siguiente ecuación:

$$x + 5 = 2x$$

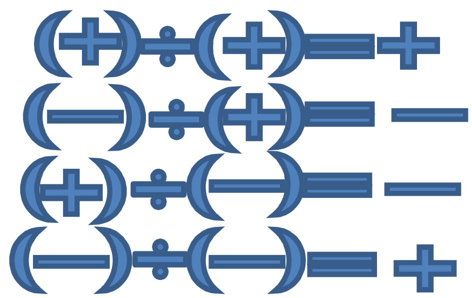
Donde *x* representa la edad actual de Pedro.

OPERACIONES CON SIGNOS ALGEBRAICOS

Al resolver ecuaciones de primer grado, es fundamental comprender cómo se manipulan los signos algebraicos. Estas operaciones son la base para aislar la incógnita y encontrar su valor.

La Regla de los Signos

La regla de los signos es una guía básica para realizar operaciones con números positivos y negativos. Recordemos que:

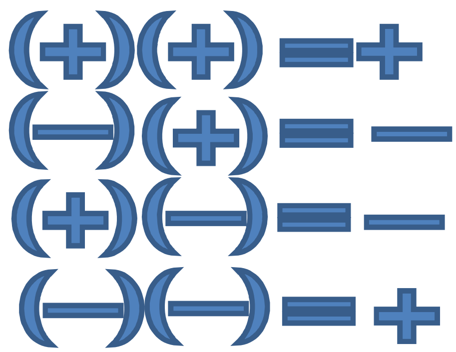


- Suma de signos iguales: Se suman los valores absolutos y se mantiene el signo.

  Ejemplo: (+3) + (+2) = +5

- Suma de signos diferentes: Se resta el menor valor absoluto del mayor y se coloca el signo del mayor.

  Ejemplo: (-5) + (+2) = -3



- Resta de un número: Sumar su opuesto.

  Ejemplo: 5 - 3 = 5 + (-3) = 2

- Multiplicación y división de signos iguales: Resultado positivo.

  Ejemplo: (+3) * (+2) = +6

- Multiplicación y división de signos diferentes: Resultado negativo.

  Ejemplo: (-3) * (+2) = -6

La Propiedad Distributiva

La propiedad distributiva nos permite "repartir" una multiplicación sobre una suma o resta dentro de un paréntesis.

- a * (b + c) = a * b + a * c

Ejemplo: $3 * (x + 2) = 3 * x + 3 * 2 = 3x + 6$

Términos Semejantes

Términos semejantes son aquellos que tienen la misma parte literal (la parte con las variables y sus exponentes). Podemos sumar o restar términos semejantes.

Ejemplo: $2x + 5x - 3x = (2 + 5 - 3)x = 4x$

Al aplicar estas reglas y propiedades, podremos simplificar las ecuaciones y avanzar hacia el despeje de la incógnita.

Los signos algebraicos son fundamentales en las operaciones matemáticas. La comprensión de cómo se suman, restan, multiplican y dividen números enteros y expresiones algebraicas es esencial para resolver ecuaciones y problemas algebraicos.

Resolver una ecuación de primer grado consiste en encontrar el valor de la incógnita (generalmente representada por la letra *x*) que hace que la igualdad sea verdadera.

Pasos para resolver una ecuación de primer grado:

1. **Simplificar ambos lados de la ecuación:**
   - Eliminar paréntesis: Aplica la propiedad distributiva si hay paréntesis.
   - Combinar términos semejantes: Suma o resta términos que tengan la misma parte literal.
2. **Aislar la incógnita:**
   - Transponer términos: Pasa todos los términos que contengan la incógnita a un lado de la igualdad y los términos independientes al otro lado. Recuerda que, al cambiar de lado, el término cambia de signo.
   - Despejar la incógnita: Realiza las operaciones inversas para dejar la incógnita sola. Si está multiplicando, divide; si está sumando, resta, y viceversa.

Ejemplo:

Resolvamos la siguiente ecuación: $3x + 5 = 17$

1. Simplificar: En este caso, ya está simplificada.
2. Aislar la incógnita:

- Restamos 5 a ambos lados para eliminar el +5 del lado izquierdo:

$$3x + 5 - 5 = 17 - 5$$
$$3x = 12$$

- Dividimos ambos lados entre 3 para despejar la x: (3x)/3 = 12/3 x = 4

Solución: x = 4

Verificación: Sustituimos el valor de x en la ecuación original: 3(4) + 5 = 17

12 + 5 = 17

17 = 17

Como la igualdad se cumple, la solución x = 4 es correcta.

Otro ejemplo con pasos adicionales:

2(x - 3) + 5 = 3x - 1

1. **Eliminar paréntesis:** 2x - 6 + 5 = 3x - 1

   2x - 1 = 3x - 1

2. **Transponer términos**: 2x - 3x = -1 + 1

   -x = 0

3. **Despejar la incógnita:** x = 0

Solución: x = 0

Hay que recordar que, al resolver una ecuación, lo que se busca es encontrar el valor de la incógnita que hace que la igualdad sea verdadera. Siempre se puede verificar la respuesta sustituyendo el valor obtenido en la ecuación original.

Aplicaciones de las Ecuaciones de Primer Grado

Las ecuaciones de primer grado son la base para resolver una gran variedad de problemas que encontramos en:

La vida cotidiana:

- **Problemas de edades:** Determinar la edad actual de una persona basándonos en relaciones entre edades.

- **Problemas de mezclas:** Calcular la cantidad de dos sustancias para obtener una mezcla con determinadas características.
- **Problemas de movimiento:** Calcular distancias, velocidades y tiempos en situaciones de movimiento uniforme.
- **Problemas de compras:** Determinar precios de productos, descuentos o cantidades de productos a comprar.
- **Problemas de reparto:** Dividir cantidades en partes proporcionales.

¿Cómo se resuelven estos problemas?

- **Comprender el problema:** Leer cuidadosamente el enunciado e identificar los datos conocidos y desconocidos.
- **Asignar una variable:** Elegir una letra (por ejemplo, x) para representar la cantidad desconocida.
- **Plantear la ecuación:** Traducir el enunciado del problema a una ecuación matemática utilizando la variable asignada.
- **Resolver la ecuación:** Aplicar los métodos aprendidos para despejar la incógnita.
- **Interpretar la solución:** Verificar si la solución obtenida tiene sentido en el contexto del problema.

La habilidad de plantear y resolver ecuaciones de primer grado es una herramienta fundamental para resolver problemas en diversos ámbitos de la vida.

Referencias

- Pardo, D. (2024, 6 marzo). ¿Sabes qué es un algoritmo? Conoce algoritmos más famosos que una estrella de cine. Pandora FMS - The Monitoring Blog. https://pandorafms.com/blog/es/que-es-un-algoritmo/
- Algoritmos: qué son y qué tipos existen - Ferrovial. (2024, 16 septiembre). Ferrovial. https://www.ferrovial.com/es/stem/algoritmos/#:~:text=%C2%BFQu%C3%A9%20son%20los%20algoritmos%3F,seguir%20para%20alcanzar%20un%20objetivo.
- Artículos destacados - Elbibliote.com. (s. f.). https://elbibliote.com/resources/Temas/html/1953.php#:~:text=Primer%20miembro%3A%20se%20encuentra%20del,valor%20desconocido%20en%20la%20igualdad.

ALGORITMO DEL BINOMIO AL CUADRADO

Por Laura Guadalupe Hernández Reza

El algoritmo del binomio al cuadrado es un método utilizado para expandir y simplificar expresiones algebraicas de la forma $(a + b)^2$, donde a y b son números o variables. Este algoritmo se basa en la identidad:

$$(a + b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$$

Este método es fundamental en álgebra y se utiliza ampliamente en diversas áreas de las matemáticas, la física y la ingeniería.

Origen y justificación

El algoritmo del binomio al cuadrado se deriva de la expansión de la expresión $(a + b)^2$ utilizando la propiedad distributiva:

$$(a + b)^2 = (a + b)\,(a + b)$$

$$= a(a + b) + b(a + b)$$

$$= a^2 + ab + ab + b^2$$

$$= a^2 + 2ab + b^2$$

Pasos para aplicar el algoritmo

1. Identifica los términos a y b en la expresión $(a + b)^2$.
2. Eleva al cuadrado cada término: a^2 y b^2.
3. Multiplica los términos a y b: $2ab$.
4. Combina los términos: $a^2 + 2ab + b^2$.

Ejemplos

1. $(x + 3)^2$

$= x^2 + 2x\,(3) + 3^2$

$= x^2 + 6x + 9$

2. $(2y - 4)^2$

$= (2y)^2 - 2(2y)\,(4) + 4^2$

$= 4y^2 - 16y + 16$

3. $(a + b)^2$

$= a^2 + 2ab + b^2$ (forma general)

Teorema del Binomio

El **Teorema del Binomio**, atribuido a Isaac Newton, describe cómo expandir la potencia de un binomio, es decir, una expresión de la forma $(a + b)^n$, donde *a* y *b* son números o variables, y *n* es un número entero no negativo. Este teorema proporciona una fórmula general para desarrollar esta potencia como una suma de términos individuales.

La expansión se basa en la siguiente fórmula:

$$(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{n-k} b^k$$

Aquí, cada término en la expansión incluye tres componentes principales:

1. **El coeficiente binomial**: $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$, que determina el número de maneras en que se pueden seleccionar *k* elementos de un conjunto de *n* elementos. Este coeficiente asegura la simetría en la distribución de los términos de *a* y *b*.
2. **La potencia de *a***: Disminuye gradualmente desde *n* hasta 000 a lo largo de la expansión.
3. **La potencia de *b***: Comienza en 000 y aumenta hasta *n*, complementando la disminución

de a.

Por ejemplo, al expandir $(a+b)^3$, se obtiene:

$$(a+b)^3 = \binom{3}{0} a^3 b^0 + \binom{3}{1} a^2 b^1 + \binom{3}{2} a^1 b^2 + \binom{3}{3} a^0 b^3$$

Al calcular los coeficientes binomiales, la expresión se convierte en:

$$a^3 + 3a^2 b + 3ab^2 + b^3$$

Este teorema no solo es una herramienta poderosa en álgebra para simplificar expresiones, sino que también tiene aplicaciones prácticas en áreas como la probabilidad, donde se utiliza para calcular probabilidades en distribuciones binomiales, y en el cálculo, para desarrollar series. Además, su estructura combina de manera elegante conceptos de combinatoria y potencias, haciendo evidente la relación entre las matemáticas discretas y continuas.

Referencias

- Gómez, M. V. (2023, 22 agosto). *Binomio al cuadrado*. /Clases/1449-algebra/16056-binomio-al-cuadrado/. https://platzi.com/clases/1449-algebra/16056-binomio-al-cuadrado/

ALGORITMO PARA RESOLVER SISTEMAS DE ECUACIONES

Por Alexa Cristel Vázquez Rodríguez

Los sistemas de ecuaciones lineales se utilizan para representar problemas físicos que involucran la relación entre varias propiedades. Por ejemplo, se pueden utilizar para calcular cantidades, intereses, porcentajes, costos y precios.

En muchas de las actividades diarias está presente el sistema de ecuaciones, en la mayoría de los casos no se tiene conciencia de que se está utilizando, sin embargo, es de vital importancia el uso de ello para solucionar conflictos.

Su complejidad va variando depende de su aplicación, va desde poder saber los precios de productos comprados conociendo solo la cantidad de cosas y el total pagado, hasta cosas más serias como la salud; modelado de la propagación de enfermedades, determinación de dosis y concentraciones de medicina, etc.

¿Qué es una ecuación?

Una ecuación es una igualdad algebraica en la cual aparecen letras con valor desconocido. El grado de una ecuación viene dado por el exponente mayor de la incógnita. Solucionar una ecuación es determinar el valor o valores de las incógnitas que transformen la ecuación en una identidad.

Una ecuación lineal con dos incógnitas es del tipo $ax + by = c$, donde x, y son las incógnitas mientras que a, b y c son valores constantes, por ejemplo, en la ecuación $2x + 3y = 20$; 2,3 y 20 son constantes y las incógnitas son x, y; su gráfica es una recta y tiene infinidad de soluciones.

¿Qué es un sistema de ecuaciones?

Es un conjunto de dos o más ecuaciones que contiene a dos o más incógnitas, dichas ecuaciones tienen relación entre sí ya que el valor de las incógnitas satisface todas las ecuaciones al mismo tiempo.

A diferencia de las ecuaciones lineales, los sistemas de ecuaciones pueden tener solución única, infinidad de soluciones o ninguna solución, ya que se deben cumplir las dos ecuaciones con los mismos valores de x, y.

Métodos de solución

Método de suma y resta (Reducción):

Es un método donde lo que se busca es eliminar una de las dos incógnitas mediante el uso de una suma algebraica. Esta eliminación puede darse de dos maneras:

- La manera directa es cuando nos damos cuenta de que, en ambas ecuaciones del sistema, la misma incógnita tiene el mismo coeficiente solo que con signo contrario. Si se diera este caso el primer paso es colocar ambas ecuaciones una encima de la otra de manera que cada tipo de incógnita forme una columna al igual que la parte sin incógnita (que debe estar siemprea la derecha del igual).

  Posteriormente sumamos y nos damos cuenta de que una incógnita se elimina pues su coeficiente se vuelve cero. Como paso final sustituimos dicho valor en una de las ecuacionesoriginales, para ello donde se encuentre dicha letra usamos paréntesis y colocamos su valor dentro de estos, realizamos las operaciones correspondientes para resolver esta segunda ecuación de primer grado y de esta manera obtendremos la segunda literal.

  Con esto quedaría resuelto nuestro sistema de ecuaciones en donde la respuesta sería el valorde ambas literales al mismo tiempo.

- Si la misma incógnita no tiene el mismo coeficiente, se toman los coeficientes de una misma incógnita, cada uno de ellos se multiplica por la ecuación contraria y a alguno se le pone el signo contrario, es decir, se tienen las ecuaciones 1 y 2, el coeficiente tomado de la ecuación1 se multiplica por toda la 2 y viceversa, tomando en cuenta que uno de ellos va con signo contrario, esto para que al sumar ambas ecuaciones se elimine una incógnita y la otra se sumepara tener solo una ecuación y poder sustituir obteniendo el valor de dicha incógnita.

  Se toma cualquier ecuación para sustituir el valor ya obtenido en dicha incógnita, se solucionala ecuación para obtener el segundo valor.

  Para finalizar se realiza la comprobación sustituyendo valores en solo una de las ecuaciones,los resultados serán correctos si da lo mismo en ambos lados de la ecuación.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 3x + 8y = 20 \\ 2x + 2y = 10 \end{cases}$$

$$3x + 8y = 20(2)$$

$$2x + 2y = 10(-3)$$

$$6x + 16y = 40$$

$$-6x - 6y = -30$$

Al sumar ambas ecuaciones se obtiene:

$$0 + 10y = 10$$

$$y = \frac{10}{10}$$

$$\boldsymbol{y = 1}$$

Se sustituye el valor obtenido en una de las ecuaciones originales:

1. $$3x + 8y = 20$$

$$3x + 8(1) = 20$$

$$3x + 8 = 20$$

$$\boldsymbol{x = 4}$$

Para comprobar que $x = 4$ y $y = 1$, se hace la comprobación tomando de nuevo solo una ecuacióny sustituyendo los valores.

2. $$2x + 2y = 10$$

$$2(4) + 2(1) = 10$$

$$8 + 2 = 10$$

$$10 = 10$$

Confirmamos la veracidad del resultado y la efectividad del algoritmo metódico utilizado para resolver el sistema de ecuaciones.

Método de Sustitución:

El método de sustitución consiste en el procedimiento de despeje de una variable (letra) de una de las 2 ecuaciones y sustituir el resultado en la segunda ecuación (la que no elegimos primero), de esta manera los pasos a seguir serían los siguientes:

1. Despejar una incógnita en solo una de las ecuaciones (elige la que sea más sencilla de despejar).
2. Hecho el despeje procedemos abrir paréntesis en la segunda ecuación en los lugares donde se encuentre la letra que despejamos en el punto 1.

3. Dentro de los paréntesis, colocamos el resultado del despeje del punto 1.
4. Resolvemos la ecuación de primer grado que se ha creado para obtener el valor de la segunda incógnita.
5. Con el valor del paso 4 regresamos a donde teníamos el despeje en el punto 2 y colocamos dicho valor (paso 4) para encontrar la primera ecuación.
6. Comprobamos sustituyendo los valores al mismo tiempo en alguna de las ecuaciones originales.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 3x + y = 19 \end{cases}$$

Se elige una ecuación para utilizarla en la sustitución, se observa que en la ecuación 2 la *y* tiene de coeficiente 1, por lo cual es recomendable elegir esa.

2. $$3x + y = 19$$

$$y = -3x + 19$$

Ahora se sustituye el valor de *y* en la ecuación 1, simplificando para obtener x.

1. $$2x + 3y = 22$$

$$2x + 3(-3x + 19) = 22$$

$$2x - 9x + 57 = 22$$

$$-7x = 22 - 57$$

$$-7x = 35$$

$$x = -\frac{35}{7}$$

$$\boldsymbol{x = 5}$$

Se sustituye el valor de *x* en una ecuación, para obtener *y*

1. $$2x + 3y = 22$$

$$2(5) + 3y = 22$$

$$10 + 3y = 22$$

$$3y = 22 - 10$$

$$3y = 12$$

$$y = -\frac{12}{37}$$

$$\boldsymbol{y = 4}$$

Ahora podremos proceder a comprobar sustituyendo ambos resultados en alguna de las ecuaciones originales. Notaremos que, efectivamente, el resultado es correcto.

Método de Igualación:

Este método suele ser sencillo para aquellos que el despeje se les facilita. El método recibeel nombre del hecho que, para resolver el sistema de ecuaciones debemos despejar la misma letra en ambas ecuaciones, esto con el motivo de igualar la parte de la derecha de la igualdady resolver una ecuación de primer grado con la misma incógnita en ambos lados. Encontrandoel valor de y podemos sustituirlo en cualquiera de los 2 despejes de x para encontrar el valor de esta misma letra.

Ejemplo:

$$\begin{cases} 2x + 3y = 22 \\ 3x + y = 19 \end{cases}$$

Despejar las dos variables (*x* o *y)* en ambas ecuaciones

1. $$2x + 3y = 22$$

$$y = \frac{22 - 2x}{3}$$

2. $$3x + y = 19$$

$$y = 19 - 3x$$

Sea $y = y$, entonces $\frac{22-2x}{3} = 19 - 3x$. Se observa que se tiene solo una variable, ahora se simplifica y despeja.

$$\frac{22 - 2x}{3} = 19 - 3x$$

$$22 - 2x = 3(19 - 3x)$$

$$22 - 2x = 57 - 9x$$

$$-2x + 9x = 57 - 22$$

$$7x = 35$$

$$x = \frac{35}{7}$$

$$x = 5$$

Finalmente, se toma una ecuación y se sustituye el valor de x para obtener y.

2. $$3x + y = 19$$

$$3(5) + y = 19$$

$$15 + y = 19$$

$$y = 19 - 15$$

$$y = 4$$

Así termina el ejercicio, queda demostrado el funcionamiento de este método.

Método de gráfico:

Este método consiste en representar las dos ecuaciones y calcular el punto de corte de estas. Este punto es la solución del sistema porque sus coordenadas cumplen ambas ecuaciones.

¡Si no hay punto de corte, el sistema no tiene solución!

Como reflexión final, podemos decir que un sistema de ecuaciones es un conjunto de ecuaciones que se resuelve simultáneamente para encontrar los valores de las variables involucradas. Estos pueden ser resueltos por medio de diversos métodos que siguen un algoritmo continuamente, esta relación facilita enormemente la resolución ofreciendo una guía de pasos a seguir para llegar a donde se desea.

Referencias:

- Allen, R. (s. f.). SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES CON DOS INCÓGNITAS [PDF]. En *Algebra Intermedia* (7.ª ed., pp. 630-640). Pearson. https://www.unl.edu.ar/ingreso/cursos/matematica/wp-content/uploads/sites/7/2017/07/M%C3%B3dulo-5-Sistemas-de-ecuaciones.pdf

MÉTODO DE GAUSS-JORDAN PARA ENCONTRAR MATRICES INVERSAS

Por Enrique Mier Regis

En álgebra lineal, la eliminación Gaussiana (también llamada eliminación de Gauss-Jordan) es el algoritmo por excelencia utilizado para procesos como la resolución de un sistema de ecuaciones o la determinación de la inversa de una matriz; esto es así debido a su eficaz y fácil uso además de su baja complejidad computacional.

En este escrito explicaremos en profundidad cómo aplicar este algoritmo para los procesos anteriormente dichos.

Orígenes

El método aparece por primera vez (aunque sin demostración) en el texto de matemáticas chino "Capítulo Ocho: Arreglos rectangulares" de "Los nueve capítulos sobre el arte matemático". Su uso es ilustrado en 18 problemas que incluyen desde 2 hasta 5 ecuaciones cada uno; se cree que las partes más antiguas de este texto datan del año 150 a.C.

El método en Europa tuvo origen en las notas de Isaac Newton. quien en 1670 escribió que todos los libros de álgebra que conocía carecían de un método para resolver ecuaciones simultáneas, que Newton luego proporcionó. Carl Friedrich Gauss ideó en 1810 una notación para la eliminación simétrica que fue adoptada en el siglo XIX por los ordenadores de mano profesionales. El algoritmo que se enseña en las escuelas no recibió el nombre de Gauss hasta la década de 1950, como resultado de una confusión sobre la historia del tema. Wilhelm Jordan describió una variación de la eliminación Gaussiana con el objetivo de "reducir" una matriz a su forma escalonada reducida.

1. **El algoritmo en sí**

1.1 Para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales

Resolver un sistema de ecuaciones lineales a mano puede llegar a ser un proceso tardío y exigente, más aún cuando el sistema consta de una gran cantidad de ecuaciones o variables. Para evitar parte de este sufrimiento, el algoritmo de Gauss-Jordan introduce una notación simplificada del sistema de ecuaciones, así como de las operaciones que se pueden realizar entre ellas mediante matrices, ilustremos la idea con un ejemplo.

Definamos el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + 2x_3 - 3x_4 = 15 \\ 3x_1 + 4x_2 - x_3 + x_4 = -6 \\ 2x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 = 17 \\ x_1 + x_2 - 3x_3 - 2x_4 = -7 \end{cases}$$

Para no tener que escribir todo esto, reducimos el sistema a una "matriz de coeficientes extendida", como su nombre indica, es una matriz en la que solo se toman en cuenta los coeficientes de cada una de las variables presentes en el sistema, la palabra "extendida" viene del hecho de que incluimos la columna de términos constantes. Luego, la matriz asociada al sistema anterior es la siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 15 \\ 3 & 4 & -1 & 1 & -6 \\ 2 & -3 & 2 & -1 & 17 \\ 1 & 1 & -3 & -2 & -7 \end{pmatrix}.$$

Ahora bien, ¿cómo vamos a resolver el sistema en esta forma?, para ello, ocuparemos las llamadas "operaciones de renglón" que nos permitirán reducir el sistema de ecuaciones a uno más simple, pero con las mismas soluciones del sistema original. Lo que hará este proceso en la matriz es llevarla a su forma "escalonada" o "escalonada reducida", la matriz en la izquierda está en forma escalonada mientras que la de la derecha está en forma escalonada reducida. Nótese que estas matrices representan sistemas de ecuaciones más simples y fáciles de resolver.

$$\begin{pmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & a_{14} & b_1 \\ 0 & 1 & a_{23} & a_{24} & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & a_{34} & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & b_1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & b_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & b_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & b_4 \end{pmatrix},$$

Hay 3 tipos de operaciones de renglón que estaremos utilizando:

- Sumar un múltiplo de un renglón a otro, que se denotará como $R_m + aR_n \rightarrow R_m$;
- Multiplicar un renglón por una constante no nula, $aR_n \rightarrow R_n$;
- Intercambiar dos renglones, $R_m \leftrightarrow R_n$

Dados los ingredientes, vamos a realizar el algoritmo para resolver el sistema de ecuaciones.

I. Hagamos el elemento a_{11} igual a uno y los elementos de la forma a_{k1} iguales a cero, para ello apliquemos las siguientes operaciones de renglón.

$$(-3)R_1 + R_2 \rightarrow R_2$$

$$(-2)R_1 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$-R_1 + R_4 \rightarrow R_4$$

II. Realizaremos el mismo procedimiento para cada una de las columnas

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 15 \\ 0 & 10 & -7 & 10 & -51 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -13 \\ 0 & 3 & -5 & 1 & -22 \end{pmatrix};$$

$$R_2 \leftrightarrow R_2$$

$$(-10)R_2 + R_3 \rightarrow R_3$$

$$(-3)R_2 + R_4 \rightarrow R_4$$

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 13 & -40 & 79 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 17 \end{pmatrix};$$

$$R_3 \leftrightarrow R_4$$

$$(-13)R_3 + R_4 \rightarrow R_4$$

$$(\frac{1}{142})R_4 \rightarrow R_4$$

III. La matriz escalonada resultante representa un sistema de ecuaciones con las mismas soluciones que el original, pero mucho más fácil de resolver, dicho sistema es el siguiente:

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 2 & -3 & 15 \\ 0 & 1 & -2 & 5 & -13 \\ 0 & 0 & 1 & -14 & 17 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{array}{lllll} x_1 & -2x_2 & +2x_3 & -3x_4 & = 15 \\ & x_2 & -2x_3 & +5x_4 & = -13 \\ & & x_3 & -14x_4 & = 17 \\ & & & x_4 & = -1 \end{array}$$

Finalmente, para resolver este sistema se aplica la llamada “sustitución hacia atrás”, llamada así puesto que partimos de la cuarta ecuación (que ya está resuelta) y terminamos en la primera encontrando el valor de la variable x_1.

IV.

$$x_1 = 15 + 2(-2) - 2(3) + 3(-1) = 2;$$

$$x_2 = -13 + 2(3) - 5(-1) = -2;$$

$$x_3 = 17 + 14(-1) = 3;$$

$$x_4 = -1$$

Nota: el algoritmo anteriormente utilizado también puede aplicarse reduciendo la matriz a la forma escalonada reducida, basta con aplicar más operaciones de renglón para hacer todos los elementos encima de la diagonal de unos iguales a cero y así encontrar de forma directa el valor de las variables.

1.2 Para determinar la inversa de una matriz

Un tema común en álgebra lineal es encontrar la matriz inversa, es decir, dada una matriz A de tamaño $n * n$, A^{-1} es la matriz tal que

$$AA^{-1} = A^{-1}A = In * n$$

donde $In * n$ es la matriz identidad.

Por razones que escapan del objetivo de este texto, para encontrar dicha matriz inversa se pueden adjuntar las matrices $In * n$ y A creando una “matriz extendida”, luego se le aplican operaciones de renglón para llevar a A a su forma escalonada reducida y “transformar” $In * n$ a A^{-1}; el proceso se ve de la siguiente forma:

$$[\, A \mid I \,] \longrightarrow [\, I \mid A^{-1}]$$

Como bien sabemos, para reducir una matriz a su forma escalonada reducida podemos utilizar la eliminación Gaussiana de manera análoga a como se utilizó para la resolución de sistemas de ecuaciones, con la diferencia de que ahora vamos a estar operando 2 matrices al mismo tiempo mediante operaciones de renglón.

Sea pues

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 \\ 2 & -4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & -2 & 3 \end{pmatrix},$$

para encontrar la inversa de A adjuntemos la matriz identidad tal que

$$[\,A \mid I\,] = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 & -2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 3 & -2 & 3 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ahora bien, apliquemos el algoritmo.

I.

$$R_1 \leftrightarrow R_3$$
$$(-2)R_1 + R_2 \to R_2$$
$$(-2)R_1 + R_3 \to R_3$$
$$(2)R_1 + R_4 \to R_3$$

II.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -16 & -2 & 3 & 0 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -11 & -1 & -4 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 15 & 2 & 5 & 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix};$$

$$(-\frac{1}{16})R_2 \to R_2$$
$$(11)R_2 + R_3 \to R_3$$
$$(-15)R_2 + R_4 \to R_4$$

III.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & -3/16 & 0 & -1/16 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 3/8 & -97/16 & 1 & -11/16 & -5/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1/8 & 125/16 & 0 & 15/16 & 1/8 & 1 \end{pmatrix};$$

$$\left(\frac{8}{3}\right)R_3 \to R_3$$

$$\left(-\frac{1}{8}\right)R_3 + R_4 \to R_4$$

$$\left(\frac{6}{59}\right)R_4 \to R_4$$

IV.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/8 & -3/16 & 0 & -1/16 & 1/8 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -97/6 & 8/3 & -11/6 & -5/3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/59 & 7/59 & 2/59 & 6/59 \end{pmatrix};$$

$$\left(\frac{97}{6}\right)R_4 + R_3 \to R_3$$

$$\left(\frac{3}{16}\right)R_4 + R_2 \to R_2$$

$$-R_4+R_1 \to R_1$$

V.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 2 & 0 & 2/59 & -7/59 & 57/59 & -6/59 \\ 0 & 1 & 1/8 & 0 & -3/472 & -19/472 & 31/236 & 9/472 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 125/59 & 5/59 & -66/59 & 97/59 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/59 & 7/59 & 2/59 & 6/59 \end{pmatrix};$$

$$\left(-\frac{1}{8}\right)R_3 + R_2 \to R_2$$

$$(-2)R_3+R_1 \to R_1$$

VI.

$$\begin{pmatrix} 1 & 6 & 0 & 0 & 2/59 & -7/59 & 57/59 & -6/59 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16/59 & -3/59 & 16/59 & -11/59 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 125/59 & 5/59 & -66/59 & 97/59 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/59 & 7/59 & 2/59 & 6/59 \end{pmatrix};$$

$$(-6)R_2 + R_1 \to R_1$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -152/59 & 1/59 & -17/59 & -134/59 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -16/59 & -3/59 & 16/59 & -11/59 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 125/59 & 5/59 & -66/59 & 97/59 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2/59 & 7/59 & 2/59 & 6/59 \end{pmatrix} = [\ I \mid A^{-1}\ ].$$

Finalmente, se tiene

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -152/59 & 1/59 & -17/59 & -134/59 \\ -16/59 & -3/59 & 16/59 & -11/59 \\ 125/59 & 5/59 & -66/59 & 97/59 \\ -2/59 & 7/59 & 2/59 & 6/59 \end{pmatrix}.$$

El método de Gauss-Jordan es una herramienta esencial en álgebra lineal, destacada por su eficiencia en la resolución de sistemas de ecuaciones lineales y en el cálculo de matrices inversas. Al reducir una matriz a su forma escalonada reducida mediante transformaciones elementales, permite encontrar soluciones exactas y determinar propiedades fundamentales de los sistemas. Este método es tomado como un algoritmo y constituye una forma sistemática de resolver problemas.

Referencias:

- Biswas, A. (2024). Método de Gauss-Jordan: Una Guía Integral. En *Atlantic International University*. Recuperado 4 de noviembre de 2024, de https://www.aiu.edu/cursos/matematica/pdf%20leccion%203/lecci%C3%B3n%203.4.pdf

CONCLUSIÓN

A lo largo de la historia, los algoritmos han sido herramientas clave para sistematizar y resolver problemas matemáticos, desde las primeras técnicas de cálculo desarrolladas por civilizaciones antiguas hasta los métodos avanzados utilizados hoy en día. Este material destaca cómo estas estrategias, aplicadas en contextos educativos, pueden transformar el aprendizaje en una experiencia más significativa y accesible para los estudiantes. Al abordar temas como problemas de optimización, geometría, derivadas, ecuaciones de primer grado, el desarrollo de binomios, sistemas de ecuaciones y el método de Gauss-Jordan, se demuestra la importancia de emplear métodos sistemáticos para estructurar y resolver problemas matemáticos.

La aplicación de estos algoritmos no solo fomenta el pensamiento lógico y crítico, sino que también permite a los estudiantes conectar conceptos abstractos con situaciones prácticas, potenciando su comprensión y habilidades. Invitamos a los lectores a explorar y practicar estas estrategias, aprovechando su potencial para enriquecer su aprendizaje y desarrollar competencias esenciales para el análisis y la resolución de problemas en matemáticas y más allá.